

**CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI
INFORMATICĂ
GRIGORE C. MOISIL
Ediția a XXVIII - a, Bistrița, 15 -17 martie 2013**

CLASA A IX -a

1) Pe laturile (AB) , (BC) , (CD) și (DA) ale pătratului $ABCD$ se pun respectiv punctele A' , B' , C' și D' oarecare.

Demonstrați că dacă

$$|\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}| = |\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}| + |\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DD'}|,$$

atunci

$$|\overrightarrow{AA'}| \cdot |\overrightarrow{DD'}| = |\overrightarrow{CC'}| \cdot |\overrightarrow{BB'}|.$$

2.) Fie ABC un triunghi dreptunghic isoscel, $m(\hat{A}) = 90^\circ$, și M un punct situat în interiorul triunghiului astfel ca

$$2AM^2 + BM^2 = CM^2.$$

Să se calculeze $m(\angle AMB)$.

3.) Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ un șir de numere reale astfel încât $a_1 = a_2 = 1$ și

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{a_n}{3^n}, \quad n \geq 1.$$

Să se arate că $a_n < 2$, oricare ar fi $n \geq 1$.

4. Fie a un parametru real fixat. Să se determine funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică ecuația funcțională:

$$af(f(x) + y) = f(x + y) + f(x) + y, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru: 3 ore.